

TEOREMA UMBRELEI

**SAU ARTA
DE A OBSERVA
LUMEA
CU BUN-SIMȚ**

Ilustrații de **Chloé Bouchaour**

Traducere din limba franceză de
Valentin Protopopescu

3
TREI

Cuprins

Introducere.....	7
Partea I. Legea supermarketurilor	11
Legea lui Benford.....	11
Gândirea multiplicativă.....	18
Simțul înăscut al numerelor	26
Scribi fără zero și virgulă	39
Puntea logaritmică.....	47
De ce este lumea multiplicativă?	59
Partea a II-a. Mere și luni	67
Cel mai înalt vârf al lumii	67
Ce sunt numerele?.....	76
Despre utilitatea umbrelor.....	87
Permanent totul cade în tot locul.....	94
Succesul teoriei gravitației.....	103
Forma Terrei	112
Partea a III-a. Meandrele infinitului	123
Pe lungimea frontierelor	123
Imensitate și infinit.....	130
Infinitul cu ciocolată	141
Linia întortocheată a lui Peano	153
Cele trei dimensiuni ale lui Euclid din Alexandria.....	161

Spre cea de-a patra dimensiune și dincolo de ea	170
Dimensiunea fractală	176

Partea a IV-a. Arta confuziei.....185

Al cincilea postulat al lui Euclid	185
Iluzia culorilor	196
Matematica lui quiproquo	205
A gândi corect fără a ști despre ce vorbim.....	214
Geometria deformată a aviatorilor	222
Rezolvarea problemei.....	236

Partea a V-a. Abisurile spațiului și timpului.....245

Cu ce viteză vă deplasați?	245
Relativitatea restrânsă	256
Noțiunea de spațiu-timp	267
$E = mc^2$	280
Relativitatea generală.....	293
În căutarea găurilor negre.....	307

Ca să mergem mai departe.....320

Introducere

În 1980, cadre didactice de la Institutul de Cercetare asupra Predării Matematicii din Grenoble au propus unui grup de copii următoarea problemă:

Pe un vapor sunt 26 de oi și 10 capre: ce vârstă are căpitanul?

Întrebarea este ciudată. Ce legătură să fie între vârsta căpitanului și numărul de oi și capre? Și totuși, 75 % dintre aproape două sute de elevi cu vârste între șapte și opt ani au oferit un răspuns fără să stea pe gânduri. Mulți au adunat și au obținut un total de 36. Dar, când același test a fost propus unor copii cu vârste între nouă și zece ani, cei mai mulți au început să protesteze sau chiar să refuze să răspundă. Doar 20 % au răspuns fără ezitare. În doi ani, spiritul critic se ascuțise. Copiii mai mari câștigaseră în perspicacitate, dând înapoi în fața unei cerințe fără sens.

Pe când aveam și eu vârsta lor, trebuie să recunosc că încercam o anumită plăcere în fața enigmelor cu capcane. A acelor care ne pun mintea la încercare și care, în fond, sunt mai curând glume decât adevărate probleme de matematică. Una dintre preferatele mele era următoarea:

O orchestră de 50 de muzicieni interpretează Simfonia numărul 9 de Beethoven în 70 de minute. Cât timp ar lua unei orchestre de 100 de muzicieni să cânte aceeași simfonie?

Firește, durata unei simfonii nu depinde de numărul muzicienilor din orchestră, 70 de minute rămân 70 de minute. În mod deosebit îmi plăcea și aceasta: *Ce cântărește mai greu, un kilogram de pene sau un kilogram de plumb?* Niciunul, desigur, deoarece greutatea lor este aceeași: un kilogram.

Ceea ce ignoram în acea perioadă e faptul că procesul de familiarizare cu sensul lucrurilor putea să ducă mult mai departe decât îmi imaginam eu. Cu cât progresam în cunoaștere, cu-atât descopeream mai multe subtilități în sensul cuvintelor și mai multe goluri în înțelegerea mea despre lume. Firește, ca adulți nu mai cădem în aceleași capcane logice precum copiii. Dar ar fi o greșeală să credem că suntem feriți de toate celelalte prejudecăți care ne pândesc. Intuiția te poate înșela, iar evidența, uneori, e falsă. Cred că pot să afirm la 35 de ani că, după școala elementară, nu a fost an din viață în care să nu realizez că gândeam greșit despre lucruri pe care eram convins că le cunoșteam foarte bine.

Când dorim să înțelegem lumea, când suntem curioși în legătură cu tot ce ne înconjoară, e normal să ne așteptăm la turbulențe. În fond, marii savanți din istorie nu au făcut altceva decât acești copii când au „învățat” să refuze calculul legat de vârsta căpitanului de vapor. S-au îndoit de ce aveau în fața ochilor și au încercat să vadă mai departe. S-au revoltat împotriva ordinii stabilite. Știința înseamnă un minunat teren pentru a supune

îndoielii ceea ce ne intrigă, iar matematica reprezintă unul dintre cele mai puternice instrumente ale sale.

A face matematică e un fel de a pătrunde în culisele lumii. Înseamnă să ne infiltrăm în spatele scenei pentru a observa uriașele roțițe-mecanisme care ne pun Universul în mișcare. Spectacolul este impresionant, dar el ne poate și tulbura. Realitatea ne sfidează simțurile și intuiția. Ea nu este întocmai așa cum o credem. Ne răstoarnă apriorismele și ne mătură cele mai intime evidențe. Detaliile cele mai anodine pot să ascundă mari mistere și enigmele pentru copii se pot dovedi uneori mult mai profunde decât par la prima vedere.

Uite o altă problemă:

Dacă patru găini fac patru ouă în patru zile, câte ouă vor face opt găini în opt zile?

Vă las să vă gândiți la problemă, o să revenim asupra ei. Tot ceea ce pot să vă spun este că atunci când am descoperit prima oară această enigmă, pe la zece ani, eram departe de a putea să-mi închipui că mă va ajuta să înțeleg într-o zi celebra formulă a tuturor timpurilor.

Însă, dacă sunteți dispuși să mă urmăriți o clipă, vă propun să pornim în aventură. S-ar putea să avem parte de unele momente dificile, căci un mod de gândire nu se modifică pocnind din degete. Vor fi îndoieli ce trebuie depășite și gânduri care își așteaptă maturizarea. Dar stați liniștiți, plăcerea de a înțelege recompensează de mii de ori efortul pe care-l vom face. În spatele acestei pagini începe călătoria noastră prin universul matematicii, ca să descoperim unele dintre cele mai frumoase mecanisme

Mickaël Launay

ascunse ale lumii în care trăim. Ridicați o clipă privirea și observați decorul dimprejur: este posibil ca după aventura în care pornim acum să nu mai vedem Universul, lumea noastră, în felul în care suntem obișnuiți.

Partea I

Legea supermarketurilor

Legea lui Benford

Călătoria în universul matematicii începe uneori în cele mai banale locuri cu putință.

La plecare, vă propun să trecem pe la supermarketul din colț. Sigur este unul în apropierea locuinței voastre. Este chiar acela în care obișnuiți să vă faceți târguielile cotidiene. Nu contează că e un uriaș centru comercial sau un minimarket sătesc; important este că acolo găsim o varietate de produse de bază, necesare traiului zilnic.

Ambianța este una de rutină. Ați mai fost aici de sute, poate de mii de ori. Raioane paralele, etajere metalice, ritmul regulat al codurilor de bare care bipăie la casă și clienți care înșfacă mecanic, din mers, o sticlă cu lapte sau câteva cutii de conserve. Dar azi nu facem trasee dedicate cumpărăturilor. Suntem angajați într-o misiune de observare.

În acest loc se ascunde una dintre părțile cele mai ciudate cu putință ale matematicii. Este aici, sub ochii voștri, și asta de ani buni. Nici măcar nu este camuflată, o puteți zări chiar în clipa asta. O mică anormalitate. Unul dintre aceste detalii care vă trec pe sub nas, fără să indice absolut nimic, dar care pot trezi totuși bănuiala observatorilor care stau cu ochii în patru. Scoateți un carnețel sau smartphone-ul, ca să consemnați, și putem să pornim în anchetă.

Priviți prețurile care se aliniază unele în spatele celorlalte, pe întreaga întindere a etajelor. 2,30 €... 1,08 €... 12,49 €... 3,53 €... Toate aceste numere par perfect aleatorii când le citim rapid unele după altele. 1,81 €... 22,90 €... 0,64 €... Gama prețurilor merge de la câteva centime la câteva zeci de euro. Însă nu ne vom concentra asupra detaliilor. Să uităm de virgule și cifrele mici. La fiecare preț, să privim doar prima cifră, cea mai importantă, cea care ne oferă o idee aproximativă.

Iată o conservă de 530 de grame de varză de Bruxelles la prețul de 1,54 €. În carnețel notați 1. Ceva mai departe, un deodorant cu eficacitate de 24 de ore costă 3,53 €. Notați 3. O brânză tip camembert de 250 de grame e la 1,81 €. Veți nota din nou 1. O tigaie antiadezivă are prețul de 45,9 €, ceea ce înseamnă că de această dată am depășit unitatea zecilor, dar nu contează, ne concentrăm doar asupra primei cifre. Notați 4. Un pachet de alune prăjite e la 0,74 €. De această dată prima cifră semnificativă este 7.

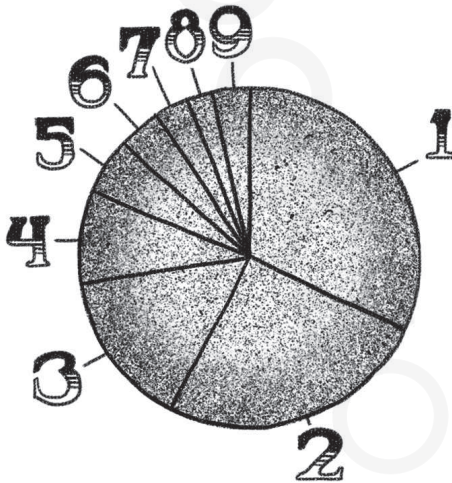
Ne mișcăm câteva minute la întâmplare și cifrele se acumulează. 1 3 1 4 7 9 2 2 1 7 9 8 1 1 3 1 1 1 8 1 1 2 1 2 1 1 9 1 4 7 1 6 1 5 9 2 2 1 3 2 2 2 1 2 2 6... Pe măsură ce tot notați, o ușoară îndoială începe să pună stăpânire pe voi. Nu găsiți că este ceva în neregulă în această înșiruire de cifre? Și pare ceva ca o formă de dezechilibru. Acest șir este compus din 1 și 2 între care, din când în când, sunt intercalate câteva cifre de 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9. Ca și cum, fără să sesizăm asta, atenția ne este atrasă natural de prețurile cele mai mici. Și aici avem o problemă.

Ca urmare, hai să ne purtăm ca niște statisticieni conștiințioși. Să ne ferim de propriile prejudecăți și să optăm pentru o metodă sistematică. Vom alege mai multe

raioane la întâmplare și de pe fiecare dintre acestea vom reține prețul tuturor produselor, fără excepție. E de muncă, dar trebuie să fim exacti.

O oră mai târziu, carnetul vă este plin de cifre în serie care defilează pe mai multe pagini. A venit vremea să facem bilanțul. După numărătoare, verdictul e fără apel și tendința este confirmată. Ați listat prețul câtorva mii de produse și aproape un sfert din acestea începe cu cifra 1! Mai mult de un sfert începe cu 2 și cu cât cifra este mai mare, cu-atât ea apare mai rar.

După această acțiune, iată repartizarea la care ajungem în final.



Aceste rezultate au fost obținute de autor în ianuarie 2019 evaluând 1 226 de prețuri abordate cu metoda indicată, dintre care cele care încep cu 1: 391 (31,9%), cu 2: 315 (25,7%), cu 3: 182 (14,8%), cu 4: 108 (8,8%), cu 5: 66 (5,4%), cu 6: 50 (4,1%), cu 7: 40 (3,3%), cu 8: 30 (2,4%), cu 9: 44 (3,6%).

De această dată, nu se mai pune problema să credem într-un efect al întâmplării sau într-o alegere subiectivă a produselor. Trebuie să ne supunem evidenței, e deja un fapt: primele cifre ale prețurilor dintr-un supermarket nu sunt echitabil distribuite. Cifrele mici manifestă un avantaj net și masiv.

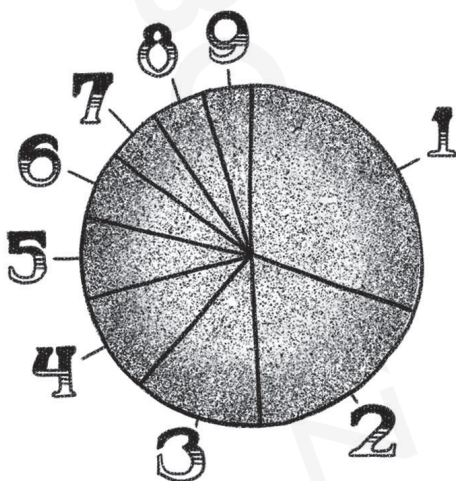
De unde provine acest dezechilibru? Iată întrebarea pe care doream să v-o adresez. Cărei legi a supermarketurilor, comerțului sau economiei se supun aceste etichete astfel încât să conducă la un asemenea rezultat bizar? De ce primele cifre ale acestor prețuri nu sunt repartizate echitabil? În matematică nu se acordă oare importanță egală tuturor cifrelor? Ele ar trebui să fie ferite de prejudecăți, de preferințe, de favoritisme. Și totuși, faptele sunt clare, ele afirmând categoric exact contrariul. La supermarket, matematica are preferatele ei și ele se numesc 1 și 2.

Am observat. Am constatat. Acum trebuie să reflectăm, să analizăm, să decojim. Am acumulat faptele, de-acum ține de noi să conducem ancheta și să tragem concluziile.

În martie 1938, inginerul și fizicianul american Frank Benford publică „The Law of Anomalous Numbers” („Legea numerelor anormale”), un articol în care analizează datele numerice rezultate din peste 20000 de observații din diverse surse. În tabelele sale se găsesc o listă a lungimilor mai multor fluvii din lume, una a populațiilor diferitelor orașe americane, măsurători ale masei atomilor cunoscuți, numere luate la întâmplare din paginile ziarelor de informație sau constante matematice. Asupra tuturor acestor date, Benford observă de fiecare dată

același lucru ca și noi: primele cifre nu sunt repartizate echitabil. În jur de 30 % din aceste numere încep cu 1. 18 % încep cu cifra 2. Iar procentajul va descrește până la cifra 9, care abia de atinge 5 % din aceste valori.

Benford nu a avut ideea să-și verifice statisticile și pe prețurile de la supermarket. Dar puteți ghici că rezultatele pe care le-ar fi obținut seamănă ciudat de mult cu ale noastre. Desigur, există câteva variații la nivel de procentaj, însă în linii mari asemănarea este izbitoare.



Studiul lui Benford arată că datele pe care le-am cules nu sunt izolate. Ele nu sunt specifice funcționării supermarketurilor, ci se înscriu într-o tendință mai amplă. După 1938, aceeași repartizare a fost observată de numeroși savanți în situații din ce în ce mai diverse și extreme.

În demografie, de pildă. Printre cele 203 țări existente pe Terra, 62 dintre ele, adică 30,5 %, au o populație

a cărei primă cifră este 1. Să începem cu cea mai populată: China, cu 1,4 miliarde de locuitori. Între cele 62 de țări regăsim și Mexicul, cu 122 de milioane de locuitori, Senegalul, cu 13 milioane și arhipelagul Tuvalu, cu 10800 de locuitori. Dimpotrivă, nu sunt decât 14 țări a căror populație începe cu cifra 9, respectiv 6,9%.

Poate că preferați astronomia? Din cele opt planete care gravitează în jurul Soarelui, patru au un diametru ecuatorial ce începe cu cifra 1. Jupiter, 142984 de kilometri. Saturn, 120536 de kilometri. Pământul, 12756 de kilometri. Însuși Soarele are un diametru de 1392000 de kilometri. Și, dacă un eșantion de nouă astre nu e suficient ca să avem o tendință fiabilă, să adăugăm și planetele pitice, sateliții, asteroizii, dar și cometele, însă veți face mereu aceeași constatare: cifra 1 e net majoritară.

Din clipa în care începem să acordăm atenție acestui aspect, exemplele curg gârlă. Să luăm o listă de numere scoase din orice fel de context, să analizăm primele cifre și o să vedem că lucrurile stau chiar așa: repartizarea lui Benford revine mereu. Departe de a fi o excepție, această lege statistică pare una perfect naturală și omniprezentă. În mod paradoxal, repartizarea echitabilă, care ar fi putut să ne pară a fi mai normală, este complet absentă din această lume.

La o asemenea scară, evident că nu se mai pune problema să vorbim despre bizareria de la supermarket. Ceea ce dorim să subliniem este existența unei veritabile legi ce acționează nu doar în numeroase domenii ale activității omenești, ci este funcțională și în natură, ba chiar în organizarea cea mai intimă a acesteia. A înțelege această lege înseamnă a cunoaște ceva extrem de profund despre lumea noastră și funcționarea acesteia.

Influența acestei legi este atât de puternică, încât o reproducem fără ca măcar să ne dăm seama de asta. Ființele omenești care stabilesc prețurile din supermarketuri nu se sincronizează, iar majoritatea nici măcar nu au auzit vorbindu-se de Frank Benford. Și totuși, fără să o știe, ca manipulați de o forță ce îi depășește, oamenii aceștia se supun legii formulate de savantul american. Așa cum o fac și locuitorii tuturor țărilor, lungimile fluviilor și diametrele planetelor.

În 1938, Frank Benford numea această repartizare „legea numerelor anormale”. Cu toate acestea, o astfel de denumire pare inadecvată, deoarece legea în cauză este pur și simplu omniprezentă. Anormalitatea nu poate fi decât subiectivă, ea nu există decât pentru oamenii care se miră de existența sa. Dimpotrivă, natura pare să constate că această lege este una perfect obișnuită, comună. Legea nu este anormală decât în măsura în care nu am reușit să o înțelegem. Dar suntem foarte hotărâți să o facem.

Însă în ce direcție să pornim? Pe ce traseu să ne înscriem gândurile ca să ridicăm voalul ce acoperă anormalitatea și să transformăm misterul în evidență?

Legea lui Benford nu e dificil de înțeles, dar explicarea ei nu poate fi făcută în doar câteva cuvinte. Matematicile care stau în spatele său sunt simple, dar profunde. Nu ne aflăm în fața unei enigme căreia să-i găsim o soluție pe care să o descoperim după un declic urmat de o exclamație: „Ah! Asta este, i-am dat de capăt!” Nu, miza e diferită, fiind vorba despre însăși înțelegerea noastră cu privire la numere și la maniera noastră de a număra, una pe care trebuie să o revoluționăm. Dacă legea lui Benford nu ne

apare ca fiind evidentă, asta se datorează faptului că noi gândim greșit. Se cuvine să învățăm să privim diferit ceea ce eram convingși că știm deja foarte bine. Trebuie să ne îndoim de noi înșine.

Dar nu e cazul să vă temeți că veți ieși cu demnitatea șifonată în urma călătoriei în lumea pe care Frank Benford ne-o deschide în fața ochilor. Legea lui vă va schimba. Și atunci, când veți înțelege această lege, e clar că nu veți mai gândi la fel.

Gândirea multiplicativă

Numeroase situații din viața cotidiană ne șoptesc discret că ne descurcăm greu operând cu numerele. Că este ceva care scârție.

Și apropo de asta, am pregătită o anecdotă.

Acum câțiva ani, în timpul unei seri de joc între prieteni, unul a avut ideea să ne provoace la un tir de întrebări din zona culturii generale științifice. S-au format două echipe, noi trebuind să răspundem la o serie de întrebări pe teme mergând de la matematică la geologie, trecând prin biologie sau informatică. La fiecare întrebare, echipa trebuia să formuleze o propoziție și cea mai apropiată de răspunsul corect lua punctul. Regula părea simplă și lipsită de ambiguitate. Cu toate acestea, o întrebare de astronomie a generat o polemică neașteptată.

Am fost întrebați care este distanța dintre Terra și Lună.

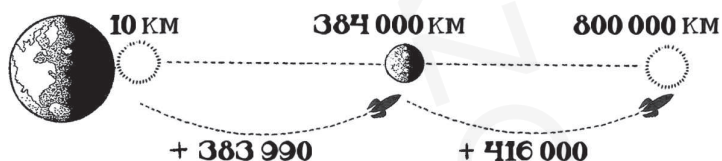
Nimeni din echipa noastră nu știa răspunsul exact, dar după o scurtă consfătuire, ne-am pus de acord că răspunsul trebuie să fie 800 000 de kilometri. În echipa

adversă, negocierile privind elaborarea răspunsului au fost mai tensionate, dar până la urmă au venit și ei cu răspunsul: 10 kilometri!

Era evident că adversarii noștri știau și mai puțină astronomie decât noi. Cel mai înalt vârf al globului, Everestul, se apropie de nouă kilometri. Dacă Luna nu se afla decât la 10 kilometri, ar fi fost de-ajuns să urcăm pe Everest pentru a fi pe punctul să ne atingem satelitul natural. Firește, răspunsul era absurd. Punctul părea deja intrat în buzunarul echipei mele.

Și totuși, verificarea s-a dovedit cel puțin derutantă. Luna se situează în realitate la 384 000 de kilometri de Terra. O simplă scădere a arătat că noi ne-am înșelat cu 416 000 de kilometri, în vreme ce echipa adversă nu se înșelase decât cu 383 990 de kilometri.

Am clipit și am refăcut calculul în minte pentru a doua oară. Nicio eroare. Recunosc că am mâzgălit o mică schemă pe un șervețel ca să mă conving că așa stau lucrurile cu adevărat.



Nu încăpea îndoială: răspunsul adversarilor era mai aproape de realitate decât răspunsul nostru. Câștigaseră. Timp de mai multe minute nu m-am putut împiedica să fac și să refac mental calculul, dar lucrurile erau clare. Matematica era categorică.

Și totuși, nu găsiți că este ceva incorect în această situație? Cu-atât mai rău dacă o să trec drept un jucător neinspirat, dar nu aveți impresia că, în ciuda rezultatului operației de scădere, răspunsul nostru era mai judicios, mai elaborat și, într-un fel, mai puțin fals decât cel oferit de echipa cealaltă?

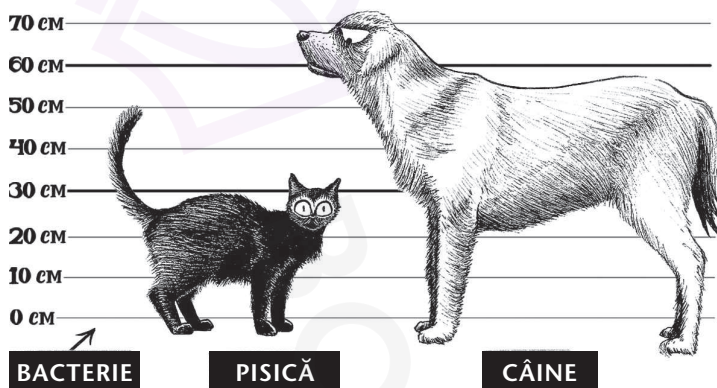
Dar de ce, în acest caz, matematica pare să ne spună exact contrariul? Pentru ce calculele au tranșat disputa în favoarea răspunsului care este evident mai puțin pertinent?

Sau poate că ar fi mai simplu să reformulăm întrebarea într-un mod diferit: oare am înțeles corect matematica pe care o întrebuițăm? Matematica nu se înșală, dar oamenii care se folosesc de ea pot uneori să o facă într-o manieră inadecvată.

Dacă ne dăm silința să mai cercetăm puțin, devine posibil să ne imaginăm numeroase situații asemănătoare. O pisică măsoară în medie 25 de centimetri și un câine labrador, tot în medie, 60 de centimetri. Anumite bacterii măsoară o miime de milimetru. Deci este posibil să afirmăm că, din punctul de vedere al înălțimii, o pisică este mai apropiată de o bacterie decât de un labrador. Există o diferență de aproape 25 de centimetri între talia pisicii și cea a bacteriei și cam 35 de centimetri între pisică și câine.

Încă o dată, această concluzie pe bază numerică este contrară percepției noastre naturale despre realitate. Pisica și câinele aparțin aceleiași lumi. Se pot juca împreună sau măcar pot să interacționeze. Se văd, se simt, știu mutual că există. Dimpotrivă, pisicile, dacă nu au studiat științele, nu au cum să bănuiască existența bacteriilor. Acestea din urmă nu fac parte din lumea lor, sunt atât de

mici încât nu sunt nici vizibile, fiind practic de neconceput la acest nivel.



Prin raționamente similare, este posibil să ne înmulțim exemplele, toate aberante în fața intuiției, totuși exacte din punct de vedere matematic. Temperatura la suprafața Soarelui este mai aproape de 5 grade Celsius decât de 15 000 de grade Celsius. Populația Parisului este mai apropiată de cea a unui sat de 12 locuitori decât de cea a New Yorkului. Dacă ați cântări planeta Marte, ați găsi că masa acesteia este mai apropiată de cea a unei mingi de ping-pong decât de cea a planetei Terra.

Ca și în cazul legii lui Benford, dacă astfel de situații ne sfidează înțelegerea, acest lucru se datorează faptului că gândim necorespunzător. Și asta deoarece folosim instrumente matematice pe care nu le înțelegem corect, într-un context în care sunt neadecvate.

Dar atunci cum să facem ca să așezăm aceste reflecții intuitive în matematică? Răspunsul se găsește în subtila noțiune a ordinului de mărime.